

## SANKİ-BİR-BOYUTLU KAVİTASYONLU LÜLE AKIŞLARININ YENİ KABARCİK GAZ BASINCI YASASIYLA MODELLENMESİ

Şenay PASİNLİOĞLU (ORCID: 0000-0003-3151-5309)<sup>1\*</sup>

Mehmet KAYA (ORCID: 0000-0003-1107-9896)<sup>2</sup>

Uğurcan MORKOYUN (ORCID: 0000-0002-3633-2168)<sup>3</sup>

Can Fuat DELALE (ORCID: 0000-0003-2655-8902)<sup>4</sup>

Erkan AYDER (ORCID: 0000-0002-0546-4838)<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Matematik Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

<sup>2,3,5</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

<sup>4</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, MEF Üniversitesi, İstanbul

Geliş / Received: 11.10.2019

Kabul / Accepted: 07.12.2019

### ÖZ

Bu çalışmanın amacı, deney sonuçlarıyla uyumlu ve ticari yazılımlara uyarlanabilen bir hidrodinamik kaviteasyon modelinin geliştirilmesidir. Bunun için sanki-bir-boyutlu kabarcıklı kaviteasyonlu lüle akışları için yeni kabarcık gaz basıncı yasası kullanılarak kabarcık sönüm mekanizmalarını içerecek şekilde bir hidrodinamik kaviteasyon modeli geliştirilmiştir. Bu modelde kabarcıklı sıvı iki-fazlı homojen karışım olarak ele alınmış, kabarcık dinamiği için Rayleigh-Plesset denklemi kullanılmış ve kabarcık çekirdekleşmesi göz önünde bulundurulmamıştır. Böylece sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu lüle akışları için elde edilen denklem sistemi, kabarcık yarıçapı ve basınç katsayısı için birinci mertebeden denklem sistemi için başlangıç değer probleminde dönüştürülmüştür. Başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için Runge-Kutta-Fehlberg uyarlanmış adım büyüklüğü yöntemi kullanılmış ve elde edilen sonuçlar deney sonuçlarıyla karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** kaviteasyonlu lüle akışları, kaviteasyon modelleri, kabarcık dinamiği

## MODELING OF QUASI-ONE-DIMENSIONAL CAVITATING NOZZLE FLOWS BY THE NOVEL BUBBLE GAS PRESSURE LAW

### ABSTRACT

The aim of this study is to develop a hydrodynamic cavitation model that is compatible with the results of the experiments and that can be adapted to commercial software. For this reason a hydrodynamic cavitation model that takes into account all of the damping mechanisms using the novel bubble gas pressure law is developed for quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flows. In this model the bubbly liquid is assumed to be a two-phase homogeneous mixture, the Rayleigh-Plesset equation is employed for bubble dynamics, and bubble nucleation process is neglected. The first order system of equations thus obtained for quasi-one-dimensional cavitating nozzle flows is transformed into an initial value problem for the bubble radius and the pressure coefficient. A numerical code is then written to solve this initial value problem by the adaptive step size Runge-Kutta-Fehlberg method. Results obtained at the experimental conditions were compared and interpreted with the results of experiments.

**Keywords:** cavitating nozzle flows, cavitation models, bubble dynamics

\*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.:(0505) 674 9882; e-mail / e-posta: pasinliogl@itu.edu.tr

## 1. GİRİŞ

Kavitasyon, sıvı basıncının hemen hemen sabit bir sıcaklıkta sıvının doyma basıncının altına düşmesiyle sıvı içinde buhar kabarcıklarının oluşması olayıdır. Akış halindeki bir sıvıda, özellikle sıvının küçük kesitlerden büyük hızla geçişi kavitasyonlu akışlara neden olmaktadır. Bir su türbini, gemi pervanesi, su pompası kavitasyona elverişli koşullar altındadır. Kavitasyonlu akışlarda sıvı içinde oluşan gaz/buhar kabarcıkları yeterli derecede yüksek bir basınç bölgesine taşındığında adeta patlarcasına büyüyerek makro boyutlara erişir ve yeniden yüksek basınç bölgesine taşındıklarında ise şiddetli bir şekilde büzülürler. Kavitasyonlu akışta gaz/buhar kabarcıklarının sıvıda oluşup kaybolmaları son derece yüksek frekanslarla tekrarlanır ve kabarcıkların yok olması sırasında, çevredeki sıvının hücumu sonucu şok dalgaları oluşur. Bu dalgalar boru cidarı, makina pervanesi gibi katı cisim üzerinde darbe etkisi yaratır ve sonuçta bu elemanların darbelere maruz kaldığı bölgeler aşınır. Kavitasyon konusundaki literatür çok zengin olmasına karşın, verilen bir akış hali için kavitasyonun fiziksel mekanizması tam olarak anlaşılmış değildir. Konunun belli başlı kitapları arasında [1-4] sayılabilir. Ayrıca, bazı ayrıntılar için derleme makalelere [5,6] de başvurulabilir. Kavitasyonlu akışların kuramsal olarak modellenmesi zordur. Daimi olmayan kavitasyonlu akışların sayısal simülasyonu için genellikle homojen iki-fazlı akış modeli kullanılır. Bu akışlar için, geometrik açıdan en basit konfigürasyonu kavitasyonlu yakınsak-ıraksak lüle akışları oluşturur. Yakınsak-ıraksak bir lüleden geçen kabarcıklı sıvı akış modeli ilk kez barotropik bir bağıntı kullanılarak incelenmiştir [7]. Problem, daimi olmayan etkiler gözönüne alınarak [8]'de yeniden ele alınmış, fakat kabarcık dinamiği ihmal edilmiştir. Kavitasyonlu akışlar için kabarcık dinamiği yasası ile lüle akış denklemlerini birlikte düşünmek zorunludur. Klasik Rayleigh-Plesset denklemi ile tanımlanan küresel kabarcık dinamiği yasasını akış denklemlerine bağlayan sürekli bir kabarcıklı karışım akış modeli [9]'de önerilmiştir. Bu model kullanılarak, sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak lülelerdeki kabarcıklı kavitasyonlu daimi akışların çözümleri [10,11]'de incelenmiştir. Daimi akış çözümlerinin yanısıra, patlayan çözümler de bulunmuştur. Ancak lüle geometrisi ve diğer parametreler sabit alınıp sadece bir parametrenin belirli bir aralıkta değiştirilmesi durumunda, sanki-bir-boyutlu lülelerde daimi akış çözümlerinin kararlı olduğu gösterilmiştir [12]. Bu modelin daimi olmayan akış hallerinde incelenmesi, özellikle deneylerde gözlenen bazı kavitasyonlu akış rejimlerinin (örneğin salınım yapan kavitasyon akışları, kavitasyonlu akışlarda şok dalgaları oluşumu, vb.) yorumlanmasına yol açmıştır ([13]). Daimi olmayan sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu lüle akışlarının yarı-analitik çözümleri, kabarcık gaz basıncının adyabatik değiştiği varsayılarak [14]'te verilmiştir.

Bu çalışmada sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi olmayan lüle akışları için ısıl sönüm mekanizmasını [15,16] içeren hidrodinamik kavitasyon modeli ele alınacaktır. Kavitasyon modelinde kabarcıklı sıvı iki-fazlı homojen karışım olarak kabul edilmiş ve kabarcık çekirdekleşme süreci göz önünde bulundurulmamıştır. Kavitasyon modelinin uygulaması olarak lüle akış denklemleri ile küresel kabarcık dinamiği için Rayleigh-Plesset denklemi, özellikle akustik kavitasyon için geliştirilen yeni kabarcık gaz yasasıyla [16] birlikte ele alınmıştır. Kabarcık yarıçapı, akış hızı ve basınç katsayısı için elde edilen birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi, için başlangıç değer problemi tanımlanmıştır. Başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için Runge-Kutta-Fehlberg uyarlanmış adım büyüklüğü yöntemi kullanılmış ve elde edilen sonuçlar kavitasyonlu lüle akışları deneyleriyle karşılaştırılarak irdelenmiştir.

## 2. SANKİ-BİR-BOYUTLU LÜLELERDE KAVİTASYONLU AKIŞ MODELİ

Bu çalışmada sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışları için elde edilen sonuçların, özellikle küresel kabarcık dinamiğinin Rayleigh-Plesset tipi bir denklemle (örneğin klasik Rayleigh-Plesset veya Keller-Miksis denklemi) betimlendiği durumlarda kararsızlıklar göstermesi ve kavitasyonlu akışların zamana bağlı davranışlarından dolayı daimi olmayan sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu lüle akışları ele alınmıştır. Daimi olmayan sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu lüle akış denklemleri, iki-fazlı homojen kabarcıklı sıvı modelinde aşağıdaki hali alır [14]:

$$A' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho' u' A') = 0 \quad (1)$$

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = \rho' \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (2)$$

$$\rho' = \rho'_i (1 - \beta) \quad (3)$$

*SANKİ-BİR BOYUTLU KAVİTASYONLU LÜLE AKIŞLARININ YENİ KABARCİK GAZ BASINCI YASASIYLA MODELLENMESİ*

$$\frac{R^3(1-\beta)}{\beta} = \frac{3}{4\pi\eta'_0} \quad (4)$$

Bu denklem sisteminde,  $\rho'$  karışım yoğunluğunu,  $\rho'_\ell$  sıvı yoğunluğunu,  $\beta$  hacimsel kabarcık oranını,  $\eta'_0$  birim sıvı hacmindeki kabarcık sayısını,  $u'$  akış hızını ve  $p'$  karışım basıncını göstermektedir. Lüle kesiti  $A'$  ile sembolize edilmiş olup  $x'$  ve  $t'$ , sırasıyla, orijin giriş kesitinde olmak üzere eksenel koordinatı ve zamanı,  $d/dt' = \partial/\partial t' + u'\partial/\partial x'$  hareketi izleyerek türev operatörünü göstermektedir. Daimi olmayan akışlarda küresel kabarcık dinamiği için Keller-Miksis denklemi yerine sıvının sıkıştırılabilirliğinin ihmal edildiği durumlarda normalize edilmiş Rayleigh-Plesset deklemini kullanılmıştır:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{1}{R^{3\Gamma}}\right) + \frac{4}{\text{Re}}\frac{\dot{R}}{R} + \frac{2}{\text{We}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^{3\Gamma}}\right) + \frac{C_p}{2} = 0 \quad (5)$$

Lüle girişindeki statik basınç  $p'_0$ , giriş hızı  $U'_0$ , kabarcık yarıçapı  $R'_0$ , sıvının kinematik viskozitesi  $\nu'_\ell$ , yüzey gerilim katsayısı  $S'$ , sıvı sıcaklığındaki doymuş buhar basıncı  $p'_v$  olmak üzere, (5) denkleminde kavitasyon sayısı  $\sigma$ , Reynolds sayısı  $\text{Re}$ , Weber sayısı  $\text{We}$ , ve basınç katsayısı  $C_p$

$$\sigma = \frac{p'_0 - p'_v}{(\frac{1}{2})\rho'_\ell U'^2_0} \quad ; \quad \text{Re} = \frac{U'_0 R'_0}{\nu'_\ell} \quad ; \quad \text{We} = \frac{\rho'_\ell U'^2_0 R'}{S'} \quad ; \quad C_p = \frac{p' - p'_0}{(\frac{1}{2})\rho'_\ell U'^2_0} \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır. (5) denklemdeki  $\Gamma$  ise, Delale ve Pasinlioğlu [16] tarafından önerilen indirgenmiş gaz basıncı yasasındaki politropik üs olup,  $f$  Peclet sayısına ve karakteristik zamana bağlı bir parametre ve  $\gamma$  izentropik üs olmak üzere

$$\Gamma = \frac{2\gamma(1+f)}{(3\gamma-1+2f)} \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Karışım yoğunluğu  $\rho'$ , lüle eksen boyu akış hızı  $u'$ , kabarcık yarıçapı  $R'$ , lüle kesit alanı  $A'$ , lüle eksen uzunluğu  $x'$  ve zaman koordinatı  $t'$

$$\rho = \frac{\rho'}{\rho'_\ell}, \quad u = \frac{u'}{U'_0}, \quad R = \frac{R'}{R'_0}, \quad A = \frac{A'}{A'_0}, \quad x = \frac{x'}{R'_0}, \quad t = \frac{t'}{\Theta} = \frac{U'_0 t'}{R'_0} \quad (8)$$

şeklinde normalize edilirse, (1)-(4) denklemleri aşağıdaki normalize hali alır:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \quad (9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_p}{\partial x} \quad (10)$$

$$\rho = 1 - \beta \quad (11)$$

ve

$$\frac{R^3(1-\beta)}{\beta} = \frac{1-\beta_0}{\beta_0} = \kappa_0^3 \quad (12)$$

(9)-(12) denklemleri kullanılarak kabarcık yarıçapı  $R$  ve normalize hız  $u$  için aşağıdaki evrim denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{(R^3 + \kappa_0^3)}{3R^2} \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (13)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(R^3 + \kappa_0^3)}{2\kappa_0^3} \frac{\partial C_p}{\partial x} \quad (14)$$

Rayleigh-Plesset denklemi (5)'te kabarcık cidar hızı  $\dot{R}$  ve ivmesi  $\ddot{R}$  ifadeleri, (13) denklemi kullanılarak

$$\dot{R} = \frac{(R^3 + \kappa_0^3)}{3R^2} \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (15)$$

$$\ddot{R} = \frac{(R^3 - 2\kappa_0^3)(R^3 + \kappa_0^3)}{9R^5} \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \frac{R^3 + \kappa_0^3}{3R^2} \left[ u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{R^3 + \kappa_0^3}{6R^2 \kappa_0^3} \left[ (R^3 + \kappa_0^3) \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + 3R^2 \frac{\partial R}{\partial x} \right] \frac{\partial C_p}{\partial x} - \frac{(R^3 + \kappa_0^3)^2}{6R^2 \kappa_0^3} \frac{\partial^2 C_p}{\partial x^2} \quad (16)$$

şeklinde yazılır. (15) ve (16) denklemleri Rayleigh-Plesset denklemi (5) denkleminde yerine konulursa, basınç katsayısı  $C_p$  için ikinci mertebeden lineer

$$\frac{\partial^2 C_p}{\partial x^2} + \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{3R^2}{R^3 + \kappa_0^3} \frac{\partial R}{\partial x} \right] \frac{\partial C_p}{\partial x} - \frac{3R\kappa_0^3}{(R^3 + \kappa_0^3)^2} C_p = S \quad (17)$$

denklemi elde edilir. Burada  $S$

$$S = \frac{\kappa_0^3(5R^3 - \kappa_0^3)}{3R^3(R^3 + \kappa_0^3)} \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \frac{8\kappa_0^3}{(\text{Re})R^2(R^3 + \kappa_0^3)} \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{2\kappa_0^3}{(R^3 + \kappa_0^3)} \left[ u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{6R\kappa_0^3}{(R^3 + \kappa_0^3)^2} \left[ \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{1}{R^{3\Gamma}} \right) + \frac{2}{\text{We}} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^{3\Gamma}} \right) \right] \quad (18)$$

şeklinde tanımlanır. (13)-(14) evrim denklemleriyle (17)-(18) denklemleri, lüle eksenı boyunca ( $0 < x < L$ ;  $L =$  boyutsuz lüle uzunluğu) ve  $t > 0$  olmak üzere kabarcık yarıçapı  $R(x, t)$ , akış hızı  $u(x, t)$  ve basınç katsayısı  $C_p(x, t)$  için kısmi türevli denklem sistemi oluştururlar. Bu denklem sisteminin çözümü için başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibi belirlenir:

$$R(x, 0) = R_0(x) ; u(x, 0) = u_0(x) ; R(0, t) = R_1(t) ; u(0, t) = u_1(t) ; C_p(0, t) = C_1(t) \text{ ve } C_p(L, t) = C_2(t) \quad (19)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki başlangıç ve sınır değerleri kullanılarak (13), (14), (17) ve (18) denklemlerinin çözümünden kabarcık hacimsel oranı  $\beta$  ve normalize edilmiş sıvı-kabarcık karışım yoğunluğu  $\rho$

$$\beta = \frac{R^3}{R^3 + \kappa_0^3} , \quad \rho = 1 - \beta = \frac{\kappa_0^3}{R^3 + \kappa_0^3} \quad (20)$$

şeklinde hesaplanır. Normalize kabarcık yarıçapı  $R$ , normalize hız  $u$  ve basınç katsayısı  $C_p(x, t)$  için (13), (14), (17) ve (18) kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin, (19) denklemindeki başlangıç koşullarını sağlayan sayısal çözümü gerekmektedir. Kavitasyonsuz başlangıç koşullarından başlayıp kavitasyonlu duruma geçiş için gerekli hesaplama süresi bu gün için maalesef en hızlı bilgisayarlarla bile mümkün değildir. Bu kapsamda Preston vd. [13] çalışmasında bile kavitasyonsuz durum yerine başlangıç koşulu, kavitasyonlu daimi akış çözümlerinden belirlenmektedir. Bu durumda lüle çıkışındaki basınç kayıplarını göstermek üzere çıkış basınç değerlerinin sınır koşulu olarak belirlenmesi gerekmektedir. Bundan dolayı bu çalışmada da daimi olmayan kavitasyonlu akışlar için başlangıç değerleri

$$R(x, 0) = R_0(x) , \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (21)$$

sanki-daimi kavitasyonlu akışların çözümünden elde edilmektedir. Bu çözüm yönteminde belirlenen lüle kesit alanı  $A(x)$  için sanki-daimi kavitasyonlu akış iteratif olarak belirlenir. Lüle boyunca hız değişiminin basınç ve kabarcık yarıçapı dağılımının daha yavaş değiştiği gözönüne alındığında, iteratif yöntemle kavitasyonsuz durumdaki hız dağılımı  $u_0(x) = (1 - \beta_0)/A(x)$  ile başlanır. Bu hız alanı kullanılarak (17)-(18) denklemleri Rayleigh-Plesset denklemi (5) ile birlikte, denge durumunda sabit lüle giriş yarıçapı ( $R(0) = 1, \dot{R}(0) = 0$ ) kabul edilip, giriş ve çıkış basınç katsayıları sınır koşulları ( $C_1(0) = 0, C_2(0) = C_{pL}$ ) kullanılarak daimi kavitasyonlu akışlar için çözülür. Bu durumda problemin başlangıç değer problemine dönüştürülmesinde çözüm tekniği açısından yarar vardır. Rayleigh-Plesset denklemi için her ne kadar başlangıç koşulları verilmişse de, basınç katsayısı için lüle giriş ve çıkışında sınır koşulları verilmiştir. Dolayısıyla basınç katsayısı için de (17) ve (18) denklemlerinin başlangıç değer problemine indirgenmesi gerekir. Bunun için atış isabeti yöntemi kullanılır. Bu yöntemde  $C_1(0) = 0$  başlangıç koşuluna ilaveten  $\partial C_p / \partial x(0, 0)$  başlangıç koşulu  $C_2(0) = C_{pL}$  olacak şekilde tahmin edilir. Böylece (5), (17) ve (18) denklemleri dördüncü mertebe Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak  $R_0(x)$  ve  $C_{p0}(x)$  için çözülür. Hız dağılımı  $u_0(x) = (1 - \beta_0)/[(1 - \beta)A(x)]$  olarak düzeltilir. Bulunan bu daimi olmayan kavitasyonlu akışın başlangıç çözümü, benzetim yapılacak zaman süreleri için ortalama değer olarak kabul edilebilir zira daimi olmayan akış çözümlerinin reel zaman benzetimleri ancak bu ortalama sapmaları, ya da ortalama değer etrafındaki çalkantıları belirler. Bu çalkantılar  $t$  anındaki çözüm

**SANKİ-BİR BOYUTLU KAVİTASYONLU LÜLE AKIŞLARININ YENİ KABARCİK GAZ BASINCI YASASIYLA MODELLENMESİ**

kullanılarak (13) ve (14) evrim denklemlerinin çözümünden  $t + \Delta t$  anındaki kabarcık yarıçapı ve akış hızı bulunur. Özellikle normalize akış hızı evrim denklemi için MacCormack sayısal benzetim yöntemi için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) - \frac{(R^3 / \kappa_0^3 + 1)}{2} \frac{\partial C_p}{\partial x} \quad (22)$$

şeklinde yazılır ve  $t$  anındaki çözümden  $t + \Delta t$  anındaki akış hızı hesaplanır. Hesaplanan akış hızı ile

$$\Psi = \ln(R^3 / \kappa_0^3 + 1) \quad (23)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u\Psi) + (\Psi + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u \quad (24)$$

denklemi çözülerek  $t + \Delta t$  anındaki kabarcık yarıçapı bulunur. Bunlar kullanılarak (17) ve (18) denklemlerinin atış isabeti yöntemiyle  $t + \Delta t$  anındaki basınç katsayısı hesaplanır.

Yukarıda küresel kabarcık dinamiğini betimleyen Rayleigh-Plesset denklemi (5) ile elde edilen sonuçlara ilaveten, ayrıca ticari kodlardaki Schnerr-Sauer [17], Zwart [18], Shingal [19] kavitasyon modellerinde kullanılan Rayleigh denkleminin yerine iyileştirilmiş biçimi

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{C_p + \sigma [1 - (1/R^{3\Gamma})]}{3}} \quad (25)$$

ele alınmıştır ( $C_p > -\sigma [1 - (1/R^{3\Gamma})]$  için (+),  $C_p < -\sigma [1 - (1/R^{3\Gamma})]$  için (-) işareti alınmalıdır). Böylece ticari kodlarda kullanılmak üzere (13), (14) evrim denklemleriyle birlikte (17), (18) ve (25) denklemlerinden oluşan kısmi türevli sistem daimi olmayan lüle akışları için uygun başlangıç ve sınır koşullarında sayısal olarak çözülmüş ve sonuçlar Rayleigh-Plesset denklemiyle elde edilen sonuçlar ve özellikle lüle deneylerinde basınç sensörleriyle okunan basınç katsayısı değerleriyle karşılaştırılmıştır.

### 3. BULGULAR VE İRDELENMESİ

Sayısal çözümler için deney koşullarına uygun olarak lüle girişindeki ortalama kabarcık yarıçapı  $R'_0 = 100 \mu m$ , ortalama giriş hızı  $U'_0 = 8 m/s$  alınarak  $20^\circ C$  sıcaklıktaki hava kabarcıklı su akışı göz önünde bulundurulmuştur. Hesaplamalar lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranı  $\beta_0$  ve ısıtılma karakterize eden (7) denklemindeki  $f$  parametreleri değiştirilerek yapılmıştır. Bu koşullarda Reynolds sayısı  $Re = 800$  ve Weber sayısı  $We = 90,14$  değerindedir. Kaviteasyonlu lüle deneylerinde basınç ölçümlerinin alındığı kuvvetli ve zayıf kaviteasyon durumları için (13), (14), (17) ve (18) denklemleri için Rayleigh-Plesset çözümleri, (13), (14) ve (26) denklemleri için ticari kodlarda kullanılan kaviteasyon model çözümleri, dördüncü mertebe Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak indirgenmiş yasadaki  $f$  parametresinin değişik değerleri için hesaplanmıştır. Bu çözümlerin başlangıç alan değerleri, sanki-daimi ortalama çözümü betimlemekte olup zamanla değişimler bu çözüm üzerindeki dalgalanmaları vermektedir. Bu çalışmada göz önüne alınan zaman sürelerinde önemli dalgalanmalara rastlanmadığından, sadece hesaplanan sanki-daimi ortalama çözüm sonuçları incelenmiştir. Şekillerde lüle boyunca boyutsuz  $x$  koordinatı  $x = x'/(70R'_0)$  olacak şekilde normalize edilmiştir. Sayısal sonuçlardaki boyutsuz lüle kesit alan  $A(x)$  ise, kaviteasyonlu lüle akışı deneylerinde kullanılmak üzere imal edilen lüle kesit alanı olarak

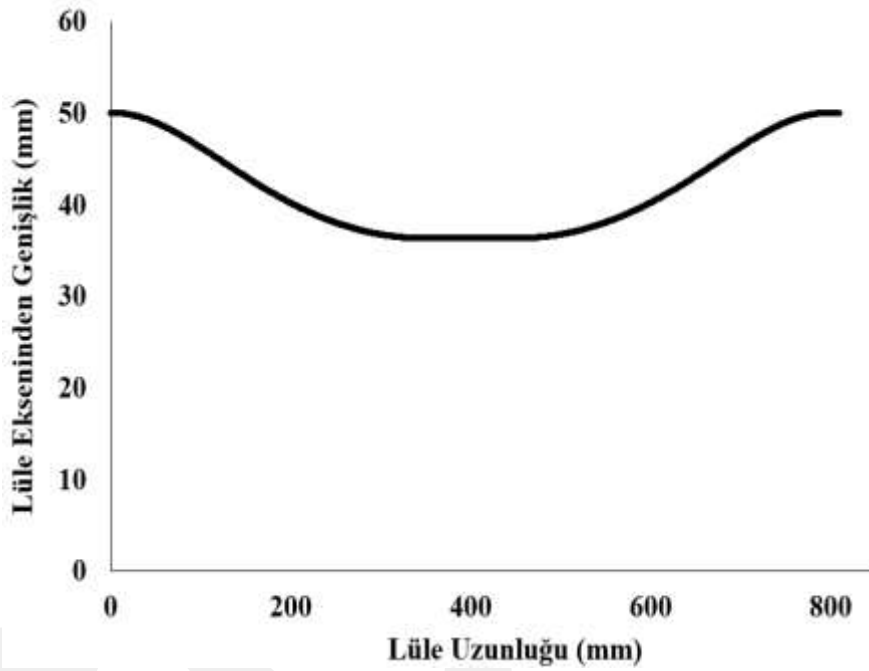
$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5 C_{p \min} (1 - \cos(2\pi \frac{x'}{L'}) )}} \quad 0mm < x' < 350mm$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - C_{p \min}}} \quad 350mm < x' < 450mm \quad (26)$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5 C_{p \min} (1 - \cos(2\pi \frac{x' - 100}{L'}) )}} \quad 450mm < x' < 800mm$$

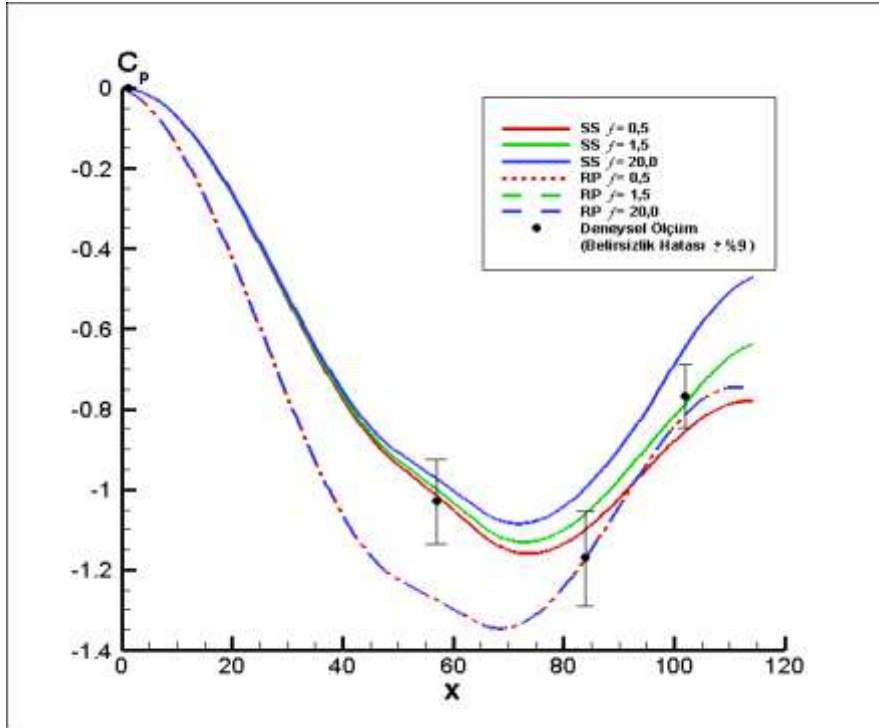
alınmıştır. Burada  $C_{p \min} = -0,9$ ,  $L' = 800$  mm değerindedir. Şekil 1 lüle çeperinin geometrisini göstermektedir..

Kuvvetli kavitasyonlu sanki-bir boyutlu lüle akışları için (kavitasyon katsayısı  $\sigma = 1,245$ ) ortalama basınç katsayıları ve kabarcık yarıçaplarının lüle boyunca değişimleri, Rayleigh-Plesset (RP) çözümlerinde  $\beta_0 = 1,0 \times 10^{-6}$  ve  $\partial C_p / \partial x(0,0) = -5,4 \times 10^{-3}$  değerleri, iyileştirilmiş Schnerr-Sauer (SS) çözümlerinde ise  $\beta_0 = 1,88 \times 10^{-1}$  değeri kullanılarak  $f$  parametresinin değişik değerleri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için Şekil 2 ve Şekil 3'te gösterilmektedir. Kuvvetli kavitasyon durumunda  $f$  parametresinin değişik değerleri için basınç katsayıları deney ölçüleriyle karşılaştırıldığında RP çözümlerinin  $f$  parametresine bağıllık göstermediği, ancak SS çözümlerinde basınç katsayılarının  $f$  parametresine göre görülebilir farklılıklar gösterdiği görülmektedir. Bu durumda RP çözümü  $x = 57$  'de deneyden sapma gösterirken, SS çözümü  $f = 1,5$  değeri için en iyi sonucu vermektedir (deneyde ölçülen statik basınç hatası  $\pm 3$  kPa civarında olup  $C_p$  belirsizlik değerleri  $\pm \% 9$  olarak Şekil 2'de gösterilmiştir).

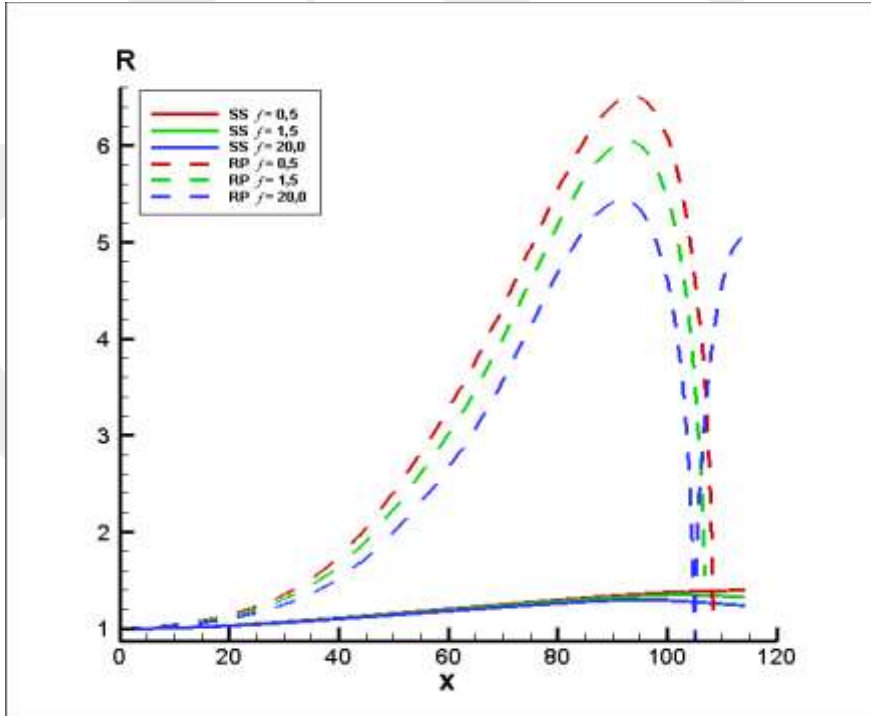


Şekil 1. Lüle çeperinin geometrisi.

*SANKİ-BİR BOYUTLU KAVİTASYONLU LÜLE AKIŞLARININ YENİ KABARCİK GAZ BASINCI YASASIYLA MODELLENMESİ*

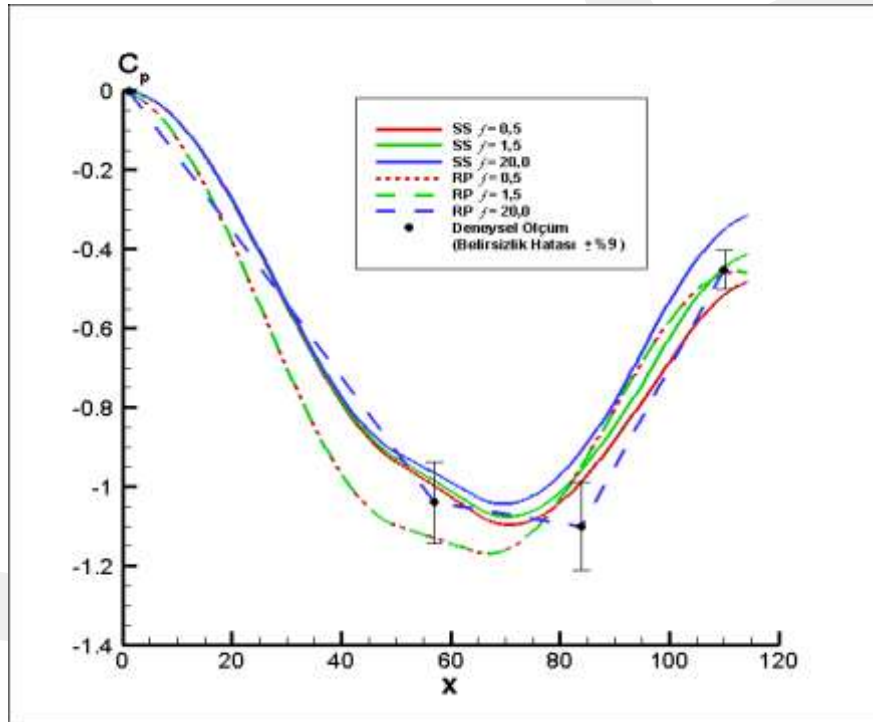


**Şekil 2.** Kuvvetli kavitasyon durumunda  $f$  parametresinin değişik değerleri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için sanki daimi ortalama basınç katsayılarının lüle boyunca değişimleri ve deneysel ölçümlerle karşılaştırılması.



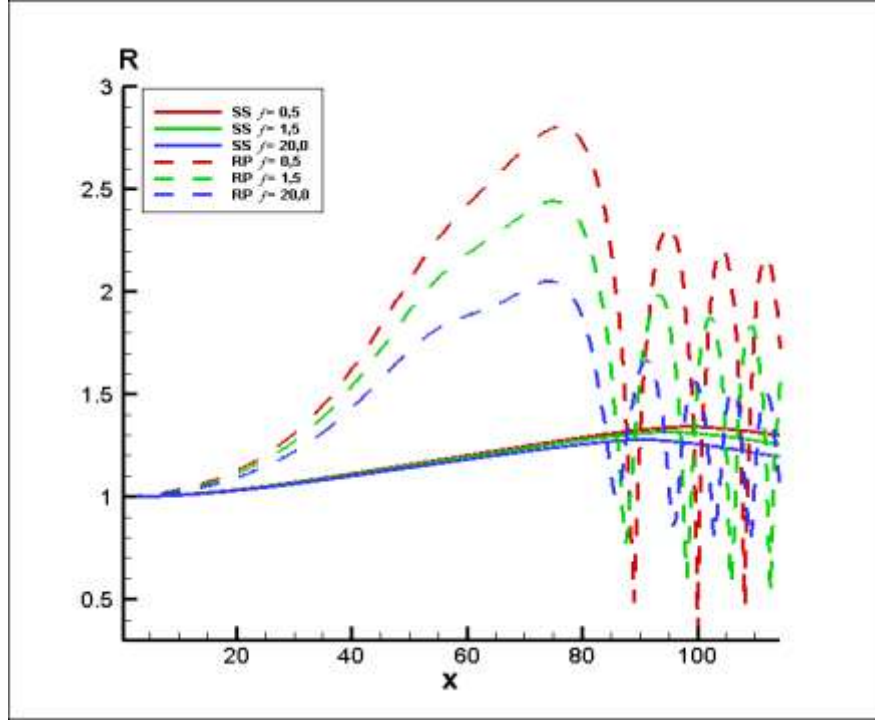
**Şekil 3.** Kuvvetli kavitasyon durumunda  $f$  parametresinin değişik değerleri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için kabarcık yarıçaplarının lüle boyunca değişimleri ve deneysel ölçümlerle karşılaştırılması.

Zayıf kavitezyonlu sanki-bir boyutlu lüle akışları için (kavitezyon katsayısı  $\sigma=1,217$ ) ortalama basınç katsayıları ve kabarcık yarıçaplarının lüle boyunca değışimleri, Rayleigh-Plesset (RP) çözümlerinde  $\beta_0 = 1,0 \times 10^{-6}$  ve  $\partial C_p / \partial x(0,0) = -3,3 \times 10^{-3}$  değeri, iyileştirilmiş Schnerr-Sauer (SS) çözümlerinde ise  $\beta_0 = 1,45 \times 10^{-1}$  değeri kullanılarak  $f$  parametresinin değışik değeri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için Şekil 4 ve Şekil 5'te gösterilmektedir (deneyde ölçülen statik basınç hatası  $\pm 3$  kPa civarında olup belirsizlik değeri  $\pm \% 9$  olarak Şekil 4'te gösterilmiştir). Zayıf kavitezyon durumunda da benzer durum görülmektedir. Bu durumda da  $f$  parametresinin değışik değeri için basınç katsayıları deney ölçümleriyle karşılaştırıldığında RP çözümlerinin  $f$  parametresine bağıllık göstermediğı, ancak SS çözümlerinde basınç katsayılarının  $f$  parametresine göre görülebilir farklılıklar gösterdiği görülmektedir. Basınç katsayısının SS çözümünde yine  $f = 1,5$  değeri için en iyi sonucu vermektedir. Sonuç olarak iyileştirilmiş SS modelinde  $f$  parametresinin  $1,5$  civarında alınması önerilmektedir.



Şekil 4. Zayıf kavitezyon durumunda  $f$  parametresinin değışik değeri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için sanki-daimi ortalama basınç katsayılarının lüle boyunca değışimleri ve deneysel ölçümlerle karşılaştırılması.

## SANKİ-BİR BOYUTLU KAVİTASYONLU LÜLE AKIŞLARININ YENİ KABARCİK GAZ BASINCI YASASIYLA MODELLENMESİ



Şekil 5. Zayıf kavitasyon durumunda  $f$  parametresinin değişik değerleri ( $f = 0,5, 1,5$  ve  $20,0$ ) için kabarcık yarıçaplarının lüle boyunca değişimleri ve deneysel ölçümlerle karşılaştırılması.

#### 4. SONUÇLAR

Bu çalışmada kabarcık dinamiğinde ısıtım mekanizmasını içeren bir kabarcıklı sıvı hidrodinamik kavitasyon modeli inşa edilmiştir. Kavitasyon modelinde kabarcıklı sıvı iki-fazlı homojen karışım olarak kabul edilmiş ve kabarcık çekirdeklenme süreci göz önünde bulundurulmamıştır. Kavitasyon modelinin uygulaması olarak sanki-bir-boyutlu lüle akışları, küresel kabarcık dinamiğini betimleyen Rayleigh-Plesset denklemi ve akustik kavitasyon için geliştirilmiş yeni kabarcık gaz yasasıyla birlikte ele alınmıştır. Kabarcık yarıçapı, akış hızı ve basınç katsayısı için elde edilen birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi için tanımlanan başlangıç değer problemi Runge-Kutta-Fehlberg uyarlanmış adım büyüklüğü yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar gerek mevcut ticari kodların sayısal çözüm sonuçlarıyla, gerek kavitasyonlu lüle akış deneylerindeki statik basınç ölçümlerle karşılaştırılarak irdelenmiştir.

Geliştirilmekte olan yeni kavitasyon modeli, santrifüj pompalardaki kavitasyon performansını iyileştirmek amacıyla kullanılacaktır. Nihai amaç, deneysel ve modele dayanan kavitasyon performans karakteristiklerinin sınırlanarak daha gerçekçi bir kavitasyon modelinin literatüre kazandırılmasıdır.

#### TEŞEKKÜR

Bu çalışma 117M072 no. lu TÜBİTAK 1001 projesiyle desteklenmiştir.

#### KAYNAKLAR

- [1] HAMMITT, F. G., *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [2] YOUNG, F. R., *Cavitation*, McGraw-Hill, London-1989.
- [3] BRENNEN, C. E., *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, 1995.
- [4] FRANC, J.P., MICHEL, J.M., *Fundamentals of Cavitation*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2004.

- [5] PLESSET, M.S., PROSPERETTI, A., “Bubble Dynamics and Cavitation”, Annual Review of Fluid Mechanics, 9, 145-185, 1977.
- [6] WIJNGAARDEN, L.V., “One-Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles”, Annual Review of Fluid Mechanics, 4, 369-396, 1972.
- [7] TANGREN, R. F., DODGE, C. H., SEIFERT, H. S., “Compressibility Effects in Two-Phase Flow”, Journal of Applied Physics, 20, 637-645, 1949.
- [8] ISHII, R., UMEDA, Y., MURATA, S., SHISHIDO, N., “Bubbly Flows Through a Converging Diverging Nozzle”, Physics of Fluids, A 5, 1630-1643, 1993.
- [9] WIJNGAARDEN, L.V., “On the Equations of Motion for Mixtures of Liquid and Gas Bubbles”, Journal of Fluid Mechanics, 33, 465-474, 1968.
- [10] WANG, Y.C., BRENNEN, C.E., “One-Dimensional Bubbly Cavitating Flows through a Converging-Diverging Nozzle”, ASME Journal of Fluids Engineering, 120, 166-170, 1998.
- [11] DELALE, C.F., SCHNERR, G.H., SAUER, J., “Quasi-One-Dimensional Steady-State Cavitating Nozzle Flows”, Journal of Fluid Mechanics, 427, 167-204, 2001.
- [12] PASİNLİOĞLU, Ş., DELALE, C.F., SCHNERR, G.H., “On the Temporal Stability of Steady-State Quasi- 1D Bubbly Cavitating Nozzle Flow Solutions”, IMA Journal of Applied Mathematics, 74, 230-249, 2009.
- [13] PRESTON, A., COLONIUS, T., BRENNEN, C.E., “A Numerical Investigation of Unsteady Bubbly Cavitating Nozzle Flows”, Physics of Fluids, 14, 300-311, 2002.
- [14] DELALE, C.F., BAŞKAYA, Z., PASİNLİOĞLU, Ş., SCHNERR, G.H., “Semianalytical Solution of Unsteady Quasi-One-Dimensional Cavitating Nozzle Flows”, Journal of Engineering Mathematics, 86, 49-70, 2014.
- [15] PRESTON, A., COLONIUS, T., BRENNEN, C.E., “A Reduced-Order Model of Diffusive Effects on the Dynamics of Bubbles”, Physics of Fluids, 19, Art. No: 123302, 2007.
- [16] DELALE, C.F., PASİNLİOĞLU, Ş., “A Reduced Order Gas Pressure Law for Acoustic Cavitation Bubbles”, Proceedings of the 10th International Symposium on Cavitation (CAV2018) (ed. Joseph Katz) Baltimore, USA, 2018.
- [17] SCHNERR, G.H., SAUER, J., “Physical and Numerical Modeling of Unsteady Cavitation Dynamics”, Fourth International Conference in Multiphase Flow, New Orleans, USA, 2001.
- [18] ZWART, P.J., GERBER, G., BELAMRI, T., “A Two-Phase Flow Model for Prediction Cavitation Dynamics”, Proceedings: 5th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2004), Yokohama, 2004.
- [19] SINGHAL, A.K., ATHAVALE, M.M., JIANG, H. L., “Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model”, Journal of Fluids Engineering, 124, 617-624, 2002.